Publicaciones Matemáticas del Uruguay
Volumen XX, Xxxx XXXX, Páginas xxx–xxx
S 0797-1443

DINÁMICA ELEMENTAL DE CUBRIMIENTOS DEL ANILLO.

ALVARO ROVELLA

Resumen. Se trata de introducir algunas ideas para estudiar la dinámica de mapas de cubrimiento del anillo abierto, con la intención de dar una mínima muestra de las preguntas que se plantean y de las técnicas usadas.

1. Introducción.

El objeto de estudio es el espacio de transformaciones continuas de grado d, del anillo abierto A en sí mismo, donde d se supondrá siempre un número de valor absoluto mayor que uno. El caso $|d| = 1$ refiere obviamente a homeomorfismos del anillo y la teoría es completamente diferente: desde los resultados a las técnicas, no hay similitudes.

1.1. Definiciones básicas. Se trata, como siempre en dinámica, de describir el comportamiento a largo plazo de las órbitas de la transformación. Sea entonces A el anillo abierto, es decir un espacio topológico homeomorfo a $S^1 \times (0, 1)$, f una tranformación de A en sí mismo con la propiedad de ser un homeomorfismo local, sobreyectivo pero no inyectivo. También se puede interpretar A como el conjunto $\mathbb{C}^* = \{z \in \mathbb{C} : z \neq 0\}$. Así se puede definir el índice de una curva cerrada $\gamma \subset A$ que no pasa por 0 como el número de vueltas que la curva da al 0. Una curva cerrada se dice esencial si su índice es no nulo y trivial en caso contrario. Se define el grado del cubrimiento f como el índice de la curva $f \circ \gamma$ alrededor del $(0, 0)$ donde γ es una curva de índice uno. Es claro que el grado así definido no depende de la elección de la curva γ. También es fácil probar a partir de estas definiciones que cada punto de A tiene exactamente $|d|$ preimágenes por f.

Si $k > 0$, se define f^k como la composición de f consigo misma k veces. Es obviamente una aplicación de A en A. Cuando $k = 0$ entonces f^k es la función identidad y cuando $k > 0$ la notación f^{-k} denota la preimagen de f^k, o sea $(f^k)^{-1}$, que como se sabe, no es necesariamente una función de A en A, sino una función de las partes de A en las partes de A.

Si $\tilde{A} = \mathbb{R} \times (0, 1)$ y $P : \tilde{A} \to A$ es $P(x, y) = (\exp(2\pi i x), y)$ entonces $(\tilde{A}, P)$ es el cubrimiento universal de A. Cualquier cubrimiento f de grado d de A tiene un *levantamiento* $F : \tilde{A} \to \tilde{A}$, es un homeomorfismo que cumple $PF = fP$, y $F(x+1, y) = F(x, y)+(d, 0)$ para todo (x, y). Una vez conocido un levantamiento F de f los demás se obtienen tralsadando F en la dirección horizontal: $F_j = F +(j, 0)$, j entero. En cierto sentido se ve que F tiene una expansión en la dirección horizontal, ya que dos puntos (x, y) y (x', y) a distancia k se transforman por F en dos puntos a distancia $|d|k$. En este hecho reside buena parte de las razones que hacen a esta teoría tan diferente a la de homemorfismos de A. Se parece mucho más a una generalización de los cubrimientos de $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Se hará mención repetidas veces a la dinámica de cubrimientos de S^1. El cubrimiento universal de S^1 se denota por $(\mathbb{R}, P_0)$ donde $P_0(x) = \exp(2\pi i x)$.

1.2. Antecedentes. Sin la mínima intención ni posibilidad de dar una descripción completa de los resultados conocidos, podemos acaso rastrear algunos de las primeras apariciones de mapas de este tipo en la literatura. Uno de los primeros resultados en esta teoría aparecen en las tesis de F.Przytycki, (ver [5]) que, en sus investigaciones al respecto de la estabilidad de endomorfismos de clase C^1 utiliza ciertas transformaciones del toro T^2 que provienen de extender un cubrimiento del anillo y que proporcionan ejemplos de mapas Axioma A que no son Ω-estables, distinguiendose así de los resultados válidos para homeomorfismos. M ás adelante, Tsujii encontró transformaciones de clase C^∞ del anillo abierto que poseen un atractor global que soporta una medida invariante absolutamente continua respecto a Lebesgue (ver [6]). Esta propiedad es imposible para mapas invertibles. En [1], las mismas transformaciones se estudian desde un punto de vista topológico, demostrándose que el atractor tiene *frecuentemente* interior no vacío. En la mayoría de los casos, estas transformaciones aparecen como ejemplos anómalos, en cambio en estas notas constituyen el objeto de estudio, partiendo de lo más básico.
Estas notas están están basadas en [2], ver también [3] y [4] donde se estudian condiciones para la existencia de puntos periódicos.

2. Ingredientes.

En esta sección definimos los tres objetos que desde diferentes ángulos muestran la complejidad que presenta el asunto. Se introduce primero el *número de rotación* para construir *semiconjugaciones*, que para mapas de cubrimiento de S^1 constituye una herramienta muy útil. Sin embargo, como se verá al final de la sección, no es posible generalizar estas construcciones a aplicaciones del anillo. Más adelante se definen *conectores* y se muestra su relevancia en la búsqueda de semiconjugaciones.

2.1. Número de rotación. Se estudia primero la definición para cubrimientos del círculo S^1, donde la técnica permite llegar a una clasificación bastante satisfactoria. Sea f una transformación de cubrimiento de grado d de S^1. Notar que si F es un levantado de f y $d > 0$ entonces $F(x+1) = F(x) + d$ para todo x, de donde se deduce que $F(x+n) = F(x) + dn$ y esto implica que $\lim_{x\to\pm\infty} F(x) = \pm\infty$, y que $F^n(x)$ debe crecer exponencialmente si x es grande.

Teorema 2.1. *Sea f un cubrimiento de grado d de S^1 donde d es un entero de valor absoluto mayor que 1, y $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un levantamiento de f. Entonces para cada $x \in \mathbb{R}$ existe el límite:*
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{F^n(x)}{d^n}$$
Además, denotando por $\rho(x)$ a ese límite, la función ρ cumple las siguientes propiedades

1. *ρ es continua*
2. $\rho(x+1) = \rho(x) + 1$
3. $\rho(F(x)) = d\rho(x)$

Se da a seguir una idea de la prueba. Hay un hecho básico que la sustenta:
Afirmación: Si $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua tal que $F(x+1) = F(x) + d$ para todo x, entonces la función $F(x) - dx$ está acotada.

Prueba: la segunda hipótesis sobre F implica que $F(x) - x$ es periódica y la continuidad que es acotada en el intervalo $[0, 1]$.
Para la prueba del teorema, se considera el espacio $\mathcal{H}$ de todas las funciones $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que: (1) H es continua (2) La función que a cada $x \in \mathbb{R}$ asocia $|H(x) - x|$ es una función acotada y (3) $H(x + 1) = H(x) + 1$ para todo x.
En el espacio $\mathcal{H}$ se considera la distancia $D(H_1, H_2) = \sup |H_1(x) - H_2(x)|$. Notar que D está bien definida porque $H_1 - H_2$ está acotado en virtud de la propiedad (2), si bien cada H_i no es acotada. Es sencillo probar que D es una distancia en $\mathcal{H}$ y que con esta distancia $\mathcal{H}$ es un espacio métrico completo. Se considera el operador Φ definido en $\mathcal{H}$ por:

$$\Phi(H) = \frac{1}{d} H \circ F$$

Se prueba fácilmente (usando la afirmación) que Φ lleva $\mathcal{H}$ en sí mismo y que es una contracción. Luego su punto fijo H es una función que cumple las tres propiedades enumeradas en la tesis del teorema. Resta ver que el límite existe y es igual a H. Notar que

$$\frac{F^n(x)}{d^n} = \frac{F^n(x) - H(F^n(x))}{d^n} + \frac{H(F^n(x))}{d^n}$$

El primer sumando tiende a 0 ya que $|H(y) - y|$ es una función accotada. El segundo término es igual $\Phi^n(H)$ calculado en x; como H es punto fijo de Φ también lo es de Φ^n: se deduce que el límite existe y es igual a $H(x)$. En definitiva, es $\rho = H$.

2.2. Semiconjugaciones. Antes de comenzar con esta sección es conveniente pensar un poco acerca de la equivalencia entre dinámicas. Diremos que dos sistemas dinámicos f y g son conjugados o equivalentes cuando existe un homeomorfismo h del dominio de f al dominio de g tal que $hf = gh$. Esto implica que dede el punto de vista dinámico los sistemas f y g son indistinguibles, ya que el comportamiento dinámico de f se traduce por el homeomorfismo h en un comportamiento idéntico para el sistema g. Sería lógico, pero como pronto se verá, muy ambicioso, proponerse el siguiente plan: establecer una familia de sistemas conocidos, más fáciles de entender y luego probar que todos los demás son conjugados a uno de estos sistemas más familiares.
Dentro del conjunto de todos los sistemas que se están considerando en estas notas, hay una subfamilia particularmente interesante y rica: es la clase de todos los cubrimientos $m_d(z) = z^d$ de S^1 con $d \in S^1$. Es claro que pocos cubrimientos de S^1 y ningún cubrimiento de A es conjugado a algún m_d, pero sí se puede definir un concepto un poco más débil que permite decir mucho acerca de la dinámica de aquellos cubrimientos del anillo que cumplan con la propiedad.

Definición 2.1. Sea f un cubrimiento de grado d de X, donde X puede ser S^1 o A. Una función $h : X \to S^1$ es una semiconjugación de f si se cumple que $hf = m_d h$ y que la imagen por h de una curva de índice uno es una curva de índice ± 1. En caso de existir tal h, se dice que f es semiconjugada a m_d.

Notar antes que nada que la segunda condición impuesta a la semiconjugación es simplemente para evitar trivialidades, ya que si f es cualquier cubrimiento de X y $h(x) = 1$ para todo x entonces la ecuación $hf = m_d h$ se cumple, pero significa nada. Como consecuencia del teorema 2.1 se tiene el siguiente hecho:

Corolario 2.1. *Si f es un cubrimiento de grado d de S^1 y $|d| > 1$, entonces f es semiconjugado a m_d.*

La función ρ obtenida en el teorema 2.1 cumple $\rho(x+1) = \rho(x)+1$. Esto implica que se puede bajar por la proyección universal P_0 de S^1 a una función h de S^1 en S^1. Las demás propiedades de h se deducen de las de ρ. □

Continuando con los cubrimientos de S^1 se verá a seguir una aplicación de la existencia de semiconjugaciones. Antes de esto, una observación acerca de las semiconjugaciones de m_d:
Sea h una semiconjugación de m_d. Se puede probar que h es una conjugación, es decir, es un homeomorfismo. Además vale que el conjunto de todos las semiconjugaciones de m_d es un grupo con la composición, isomorfo al grupo dihedral con $|d-1|$ elementos, D_{d-1}. Si h es una semiconjugación de un cubrimiento f entonces toda otra semiconjugación h' de f se obtiene componiendo h con un elemento de D_{d-1}.

Definición 2.2. Sea f un cubrimiento de S^1 y defina Λ_f como el conjunto de los puntos x tales que $h^{-1}(h(x))$ contiene algún punto diferente de x.

Teorema 2.2. *Si f es un cubrimiento de S^1, entonces el conjunto Λ_f, que fue definido a partir de h (una semiconjugación de f) no depende en realidad de h. Además se tienen las siguientes propiedades:*

1. *Λ_f es completamente invariante (es decir, $f^{-1}(\Lambda_f) = \Lambda_f$).*
2. *Cada $h^{-1}(h(x))$ es un intervalo (puede ser un punto).*
3. *Si L es una componente no trivial de Λ_f, entonces el interior de L es periódico o errante y la restricción de f a esa componente es inyectiva.*
4. *Λ_f es vacío sii f es conjugada a m_d. Si no es vacío es denso.*

Sea h' otra semiconjugación de f; por el ejercicio anterior, existe un homeomorfismo c tal que $h' = ch$. De esto se deduce la primera afirmación. Las afirmaciones de (1) a (4) no son difíciles de probar. Además se puede progresar en la clasificación usando la siguiente idea:

Cuando Λ_f es vacío entonces f es conjugado a m_d y cuando no, cada componente de Λ_f es un intervalo, donde f es inyectiva y o bien es errante, o bien es periódica. Si dos funciones tienen el mismo conjunto Λ entonces serán conjugadas sii sus restricciones a los intervalos periódicos son homeomorfismos del intervalo conjugados. Esta idea conduce a una clasificación de los cubrimientos de S^1. Ver el resultado preciso en [2].

2.3. Conectores. Ya se definió número de rotación y se vio como sirve para obtener semiconjugaciones para cubrimientos de S^1. La cuestión ahora es ver qué de todo esto puede generalizarse a cubrimientos de A. En esta parte se introduce un tercer ingrediente que es una propiedad geométrica determinante. Se puede pensar A como la esfera menos los polos; la compactificación con dos puntos de A es la esfera S^2. Se denota por A^* a la compactificación, por N y S los puntos agregados.

Definición 2.3. Se llama conector a cualquier subconjunto cerrado y conexo K contenido en A, que cumple dos propiedades:
(1) $K \cup \{N, S\}$ es conexo en A^*,
(2) $A \setminus K$ es conexo.

Equivalentemente, K es un conector si $K^* = K \cup \{N, S\}$ es compacto y conexo en A^*, contiene N y S y su complemento en A^* es conexo. O también un conector es un conjunto que conecta N con S y que no separa A. Por ejemplo, $K_1 := \{(x, 1) : x \in (0, 1)\}$ es un conector en A. También es un conector la curva $K_2 = \{P(h(x), x) \in S^1 \times (0, 1) \ : \ x \in (0, 1)\}$ donde h es un homeomorfismo de $(0, 1)$ en $\mathbb{R}$: esta curva se enrosca en ambas componentes de la frontera del anillo. En general una curva simple $\gamma : (0, 1) \to A$ tal que $\gamma(t) \to S$ cuando $t \to 0$ y $\gamma(t) \to N$ cuando $t \to 1$ es un conector. Pero no todo conector contiene necesariamente una curva tal.
No es un conector si separa el anillo, por ejemplo si a una curva como la γ de recién se le une una curva esencial cualquiera del anillo.
La prueba de las siguientes propiedades y ejemplos de conectores es sencilla

En esta afirmaciones K denota un conector de A y f un cubrimiento de grado d de A.

1. La preimagen por f de un conector es igual a la unión de $|d|$ conectores.
2. f es una biyección de cada componente de $A \setminus f^{-1}(K)$ sobre $A \setminus K$.
3. Un conexo K conecta N con S sii corta toda curva esencial en A. Por lo tanto K es un conector sii es conexo, cerrado, su complemento es conexo y corta toda curva esencial.

3. Equivalencias.

El resultado fundamental de esta sección relaciona una condición puramente analítica como es la existencia del número de rotación con una condición más bien geométrica. Un conector K es libre si $f(K) \cap K = \emptyset$, y es invariante si $f(K) = K$. Sea $(x, y) \in \tilde{A} = \mathbb{R} \times (0, 1)$, F un levantamiento de f y $(x_n, y_n) = F^n(x, y)$. Se define el número de rotación como

$$\rho_F(x, y) = \lim_{n \to +\infty} \frac{x_n}{d^n}$$

en caso que el límite exista. Si existe para todo punto de $\tilde{A}$ y es una función continua, se dice que f tiene número de rotación. Usando que $(F + j)^n = F^n + j(d^{n-1} + \cdots + d + 1)$ se prueba que $\rho_{F+j} = \rho_F + \frac{j}{d-1}$. Luego la definición no depende del levantado que se haya elegido.

Teorema 3.1. *Sea f un cubrimiento de grado d del anillo abierto A, donde $|d| > 1$. Se consideran las siguiente propiedades:*
(a) Para cualquier levantamiento F de f existe la función número de rotación y es una función continua.
(b) Existe una semiconjugación de f.
(c) Existe un conector libre para f.
(d) Existe un conector invariante para f.

Entonces (b) (c) y (d) son equivalentes y (a) implica cualquiera de ellas.
Si la función que a cada $(x, y) \in \tilde{A}$ asocia $x_1 - dx \in \mathbb{R}$ es acotada (donde $(x_1, y_1) = F(x, y)$), entonces f cumple las 4 condiciones.

Ver el último ejemplo de estas notas donde se muestra que (a) no es equivalente al resto. La implicación de (a) a (b) es más bien obvia, y ya se explicó en la sección anterior (ojo que la hipótesis de que el número de rotación es continuo se necesita para que sea fácil, comparar con el problema planteado al final). Para probar la última de las afirmaciones del teorema se copia la prueba del teorema unidimensional, ya que la hiptésis impone la validez de la afirmación previa. La siguiente secuencia de lemas implicará el resto del teorema.

Lema 3.1. *Si K es un conector libre para f entonces existen $|d-1|$ conectores invariantes.*

Se indica un camino para la prueba en el caso $d=2$ para ahorrar discusiones. Notar que $f^{-1}(K)\cap K=\emptyset$ (caso contrario K no es libre). Además $f^{-1}(K)$ es la unión de 2 conectores. Como K es conexo y no corta $f^{-1}(K)$, resulta que una sola de las dos componentes de $A\setminus f^{-1}(K)$ contiene K; se denota por U a esta componente y V a la otra. Entonces resulta que $f(V)$ contiene a la clausura de V y f es inyectiva en V. Para cada $N\in\mathbb{N}$ se define:

$$V_N=\bigcap_{n=0}^{N} f^{-n}(V).$$

Es conexo porque es intersección de conexos: no porque cada $f^{-n}(V)$ sea conexo, sino porque sólo una componente de $f^{-n}(V)$ está contenida en V_{n-1}. Además cada V_N es abierto y contiene a la clausura de V_{N+1}. Se define K' como la intersección de todos los V_N. Se deduce que K' es conexo por ser intersección de conexos encajados, es cerrado porque es también la intersección de las clausuras de los V_N, conecta S y N porque cada V_N los conecta y su complemento tiene una sola componente porque lo mismo ocurre para cada V_N. Se concluye que K' es un conector, y es invariante por construcción. □

Lema 3.2. *Si un cubrimiento de grado d de A (con $|d|>1$) tiene un conector invariante, entonces es semiconjugado a m_d.*

La idea (para $d=2$ es ir definiendo la h así : h vale 1 en el conector invariante y ha de valer -1 en su preimagen, si se espera que la ecuación $hf=m_2h$ se cumpla. Tomando f-preimágenes sucesivas de K y m_2-preimágenes del 1 y ordenándolas se va definiendo la h. Esto define h apenas en un subconjunto de A, exactamente el subconjunto R formado por aquellos puntos que alguna iterada positiva de f lleva a K. Un instante de observación permite concluir que hay una única manera de definir h en cada componente del complemento de R de manera que sea continua. □

Lema 3.3. *Sea h una semiconjugación de $f\in Cov_d(A)$. Entonces $h^{-1}(1)$ contiene un conector invariante.*

Es claro que la preimagen de 1 es un conjunto invariante, no tiene que ser conexo necesariamente pero es seguro que contiene un conector. Si no fuese así, usando la tercera de las propiedades de los conectores, se tiene una curva esencial γ que no corta la preimagen de 1. Quiere decir que $h\gamma$ tiene índice 0 lo que contradice la definición de semiconjugación. □

4. Problemas y ejemplos.

Ejemplo: Si $\bar{A}$ es el anillo cerrado y f es un cubrimiento de $\bar{A}$, entonces f cumple las condiciones del teorema 3.1. Para demostrarlo, se puede repetir la demostración hecha en el caso unidimensional, ya que el dominio fundamental del cubrimiento universal tiene clausura compacta y por lo tanto vale la propiedad de acotación que sustentaba la prueba de la existencia del número de rotación en aquel caso.

El siguiente problema está en la base de las discusiones anteriores.
Se considera $\mathbb{G}_d$ el espacio de gérmenes de mapas d a 1 con la topología de Whitney. Esto es, cada elemento de $\mathbb{G}_d$ está representado por una transformación f definida en un entorno U de 0 de forma que lleva 0 en 0 y es un cubrimiento de grado d del anillo $U \setminus \{0\}$ en el anillo $f(U) \setminus \{0\}$. Dos transformaciones son equivalentes si coinciden en un entorno de 0; el cociente de esta relación es el espacio de gérmenes, $\mathcal{G}_d$. La topología está dada por las bases de entornos

$$\mathcal{U}(f;\epsilon) = \{g : |g(x) - f(x)| < \epsilon(x)\ \forall x\},$$

donde ϵ es una función positiva y continua definida en $U \setminus \{0\}$, donde U es un entorno de 0.
Gérmenes conjugados. Dos transformaciones f y g son conjugadas si existe un entorno de 0 y un homeomorfismo h definido en ese entorno tal que $fh = hg$. Es obvio que si tomamos transformaciones equivalentes a f y g también van a ser conjugadas entre sí ; luego esta definición se extiende a gérmenes conjugados. Es claro que la relación de conjugación es de equivalencia en $\mathcal{G}_d$, por lo tanto vale plantearse:

Problema: Hallar un representante de cada clase de conjugación de gérmenes.

Esta es una pregunta demasiado ambiciosa. Para internarse un poco en su significado puede venir bien atender el próximo lema y los ejemplos que le siguen.
Se restringirá la pregunta a dos clases bien particulares de gérmenes:
El germen representado por f es *repulsor* si existe un entorno abierto U de 0 tal que la clausura de $f^{-1}(U)$ está contenida en U y para todo $x \in U$ existe un $n \geq 0$ tal que $f^n(x) \in U \setminus f^1(U)$.
El germen representado por f es *atractor* si existe un entorno abierto U de 0 tal que la clausura de $f(U)$ está contenido en U y para todo $x \in U$ se cumple que $\lim_{n\to+\infty} f^n(x) = 0$.

Lema 4.1. *Hay una sola clase de conjugación de gérmenes repulsores.*

Conviene introducir otra notación:
Sea γ una curva simple cerrada y esencial en $U\setminus\{0\}$; defina A_γ como la componente de $U \setminus \gamma$ que contiene al 0. Para la prueba del lema pueden seguirse los siguientes pasos:

1. Notar que si γ es como arriba, entonces $f^{-1}(\gamma)$ es también una curva simple cerrada y esencial.
2. Si f es representante de un germen repulsor entonces existe una curva γ simple cerrada y esencial en $U \setminus \{0\}$ tal que $f^{-1}(\gamma) \subset A_\gamma$ y
$$\cap_n A_{\gamma_{-n}} = \{0\},$$
donde $\gamma_{-n} = f^{-n}(\gamma)$.
3. Sean f_1 y f_2 representantes de gérmenes repulsores y para $i = 1, 2$, sea γ^i la curva dada en la definición. Sea h un homeomorfismo de γ_1 en γ_2, defina h en $x \in f_1^{-1}(\gamma_1)$ de forma que $h(f_1(x)) = f_2(h(x))$. Notar luego que es posible extender h a un homeomorfismo de $A_{\gamma_1} \setminus f_1^{-1}(A_{\gamma_1})$ en $A_{\gamma_2} \setminus f_2^{-1}(A_{\gamma_2})$. Luego usando la propiedad de repulsor y la ecuación de conjugación se ve que h se extiende de una única forma al resto de A_{γ_1}.
4. Una vez definida h en este dominio fundamental, se extiende de la única manera posible (para que cumpla la ecuación de conjugación) a su preimagen.

Y así sucesivamente a todas las preimágenes, cuya unión cubre $U \setminus \{0\}$ como consecuencia de la definición de repulsor.

Un germen es *topológicamente estable* si tiene un entorno tal que todos los gérmenes en ese entorno son conjugados.

Corolario 4.1. *Todo germen repulsor es topológicamente estable.*

Esto se deduce del lema anterior una vez que se demuestra que todo perturbado de un germen repulsor es también repulsor.

Ejemplo. La transformación $m_2(z) = z^2$ no es estable.
Se puede escribir $m_2(r, x) = (r^2, 2x)$, donde las coordenadas son $r \in (0, 1)$ y x es un número real módulo 1, o sea $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Sea $\epsilon(r, x)$ una función continua y positiva definida en $(0, 1)$. Se puede suponer que ϵ no depende de x, tomando en vez de ϵ la función $\epsilon'(r) = \text{mín}_x\{\epsilon(r, x)\}$. Es posible encontrar funciones continuas $\rho(r)$ y $\phi(r, x)$ tales que $\rho(r) < \epsilon(r)$ para todo r y $\phi(r, x) = 2x$ para $|x| > \rho(r)$, de forma que la transformación $f(r, x) = (r^2, \phi(r, x))$, cumple las siguientes propiedades:
1. el conjunto $R = \{(r, x) : r < 1\ x < \rho(r)\}$ es un conjunto invariante para f
2. $|\phi(r, x) - 2x| < \epsilon(r)$ para todo (r, x).

Se deduce que f está en el entorno $\mathcal{U}(m_2, \epsilon)$ y no puede ser conjugada a m_2 porque f tiene un conjunto invariante de interior no vacío donde f es inyectiva, pero m_2 no. Ver los detalles en [2].

Más o menos con la misma idea se puede probar lo siguiente, en contraposición al corolario 4.1

Corolario 4.2. *Ningún germen atractor es topológicamente estable.*

El último ejemplo muestra que no todo cubrimiento del anillo abierto cumple las condiciones equivalentes del teorema 3.1. Su construcción es bastante más difícil, sólo se mencionan aquí sus propiedades. Su construcción detallada puede leerse en [2].

Ejemplo. Existe un cubrimiento f de grado d del anillo abierto A, que cumple las siguientes propiedades:

1. Existe una curva γ, simple, cerrada y esencial tal que $\{f^n(\gamma) : n \in \mathbb{Z}\}$ es una familia disjunta de curvas simples y cerradas.
2. Para todo $x_0 \in A$ y cualquier órbita $\{x_n : n \in \mathbb{Z}\}$ del punto x_0, existe un único $n \in \mathbb{Z}$ tal que $x_n \in D_0$ donde D_0 es el anillo semiabierto cuyas componentes de frontera son γ_0 y $f(\gamma_0)$.
3. f no es semiconjugado a $m_d(z) = z^d$ en S^1.

Resulta entonces que el número de rotación no existe para este cubrimiento.

Ejemplo. Puede existir una semiconjugación pero el número de rotación no. Sea $F(x, y) = (2x/y, y^2)$ definida en $\mathbb{R} \times (0, 1)$. Se verifica que F es el levantado de un cubrimiento de grado 2 del anillo abierto A. Se puede calcular explícitamente el límite de $x_n/2^n$ y da $+\infty$ para cualquier (x, y) si $(x_n, y_n) = F^n(x, y)$. Sin embargo, es fácil construir un conector invariante, y por lo tanto f es semiconjugada a m_2.

Problema. Sea f tal que para todo $(x, y) \in \tilde{A}$ existe el número de rotación. ¿Es necesariamente una función continua?

Notar que si x es un levantado cualquiera de un punto periódico de f, entonces el número de rotación existe para este x. Podría plantearse una pregunta menos ambiciosa:

Problema. Sea f un cubrimiento de A. ¿Es la función número de rotación continua en los periódicos de f?

Bibliografía.

[1] R.Bamón, J.Kiwi, J.Rivera-Letelier, R.Urzúa. *On the topology of solenoidal attractors on the cylinder.* Ann. del'Inst. H.Poincaré (C) 23-2 (2006) 209-236.

[2] J. Iglesias, A. Portela, A. Rovella, J. Xavier. *Dynamics of annulus maps I: semiconjugacies.* Math Z. DOI 10.1007/s00209-016-1653-6 (2014)

[3] J. Iglesias, A. Portela, A. Rovella, J. Xavier. *Dynamics of annulus maps II: periodic points for coverings.* Fund. Math. DOI 10.464/fm 89-6-2016

[4] J. Iglesias, A. Portela, A. Rovella, J. Xavier. *Dynamics of annulus maps III: completeness.* Nonlinearity 29(9) 2641-2655 (2016).

[5] F.Przytycki. *On Ω-stability and structural stability of endomrphisms satisfying Axiom A.* Studia mathematica 60 (1977) 61-77.

[6] M.Tsujii. *Fat solenoidal attractors.* Nonlinearity 14 (2001) 1011-1027