Sexto Coloquio Uruguayo de Matemática

Cursillo: La regularidad de los poliedros

por Ángel Pereyra

Introducción

Estas notas fueron redactadas con cierta premura. Su propósito es muy específico: servir de apoyo y motivación para que los cursillistas tengamos una actitud imaginativa y constructiva, conociendo de antemano el propósito de cada clase, pero no el desarrollo detallado de las mismas. Una de las carencias de estas notas es que no contienen gráficos, sin embargo a lo largo del texto aparecerán sugerencias precisas para realizar ciertas observaciones en figuras que uno mismo puede construir o encontrar "por ahí ". Otra debilidad (o no) de las notas es que las demostraciones sólo están esbozadas o directamente dejadas a cargo del lector. Espero que este material sea de lectura fluida y genere ganas de estudiar más sobre un tema bonito, antiguo y a la vez susceptible de revisiones y ampliaciones. En el curso sí se van a mostrar muchas figuras y se darán detalles sobre algunas demostraciones.

En pocas palabras el objetivo del curso es: analizar algunas variaciones de la noción clásica de poliedro regular, teniendo como concepto moderno unificador el de grupo de simetría. Paralelamente a la exploración de la regularidad, la noción de poliedro ha ido evolucionando hasta el punto en que el objeto geométrico visualizable es la realización ("proyección" a $\mathbb{R}^3$) de un objeto abstracto -una estructura de caras que verifica ciertas propiedades de incidencia en relación al conjunto de las aristas y vértices de un grafo-.

La primera clase será dedicada principalmente a familiarizarnos con la noción de grupo de simetría de una figura en el espacio, los elementos de este grupo son los movimientos que dejan invariante a la figura dada y la operación entre ellos es la composición. Asumidos conocidos los cinco sólidos platónicos, veremos que tanto podemos avanzar en la descripción de los grupos de simetría de estos poliedros, apoyándonos en la visualización y en la noción de dualidad. También analizaremos diferentes condiciones geométricas equivalentes que permiten asegurar la regularidad de un poliedro convexo. Finalmente comentaremos un resultado importante debido a F. Klein que asegura que: cualquier subgrupo finito del grupo de las isometrías de $\mathbb{R}^3$ es un grupo generado por una rotación, o por una rotación y una simetría especular respecto de un plano perpendicular al eje de la rotación, o es el grupo de alguno de los sólidos platónicos.

La segunda clase la dedicaremos a conocer la familia de los poliedros semiregulares, daremos ideas precisas de cómo construirlos a todos. La noción de grupo de simetría jugará un papel esclarecedor en este contexto. También daremos un vistazo rápido a la familia dual de la de los poliedros arquimedianos: los sólidos de Catalán, será una oportunidad más de ver la dualidad en acción.

En la tercera clase usaremos en profundidad el concepto de transitividad total, que es un debilitamiento leve de la noción estándar de regularidad para poliedros. Un poliedro (no necesariamente convexo, eventualmente compuesto) se dice totalmente transitivo si su grupo de simetrías directas lleva cualquier vértice (arista o cara) en cualquier otro vértice (arista o cara, respectivamente). Vamos a demostrar que son 14 estos poliedros (los platónicos, cuatro estrellados y cinco compuestos), habrá visualizaciones de todos ellos. Aprovecharemos el contenido de esta última clase para hacer algún comentario sobre la noción abstracta moderna de poliedro. Quizás hasta lleguemos a dar la definición!

Primera clase:
Poliedros convexos. Sólidos platónicos y sus grupos de simetría.

Antes que nada, convendría tener al alcance de las manos realizaciones 3D de los cinco sólidos platónicos.

Lo primero será hacer una revisión rápida del concepto de poliedro convexo, asumiré que los cursillistas tienen cierto conocimento básico del asunto, no abundaré en detalles. Podemos pensar a un poliedro convexo como la intersección de un número finito de semiespacios cerrados de $\mathbb{R}^3$ tal que esta intersección resulte de interior no vacío y acotada. En definitiva, lo esencial es comprender que dado un poliedro convexo están perfectamente determinadas sus caras, sus aristas y sus vértices. Los vértices, aristas y caras son las intersecciones 0, 1 y 2 dimensionales (respectivamente) de los semiespacios de apoyo del poliedro con el propio poliedro. No necesitamos un conocimiento detallado de esto para el cursillo, con una idea general intuitiva alcanza. Para estos poliedros vale el resultado de Euler $V - A + C = 2$. Si no lo han hecho antes, pueden verificar el teorema para el icosaedro y el dodecaedro. Más adelante apelaremos a una consecuencia más o menos directa de este teorema, por eso lo menciono.

Es muy conocido el resultado de que existen exactamente cinco clases de poliedros regulares convexos: el tetraedro, hexaedro (cubo), octaedro, dodecaedro e icosaedro. Para ser más precisos deberíamos decir tetraedro regular, etc..

Acá hay varias cuestiones que conviene considerar aunque sea sin profundizar en este momento:
i. ¿Qué significa que un poliedro convexo sea regular?
ii. Si respondimos i. surge otra pregunta,¿cómo estamos seguros de que cinco los poliedros mencionados arriba efectivamente existen y que no fuimos "engañados" por sugerentes dibujos o volúmenes?
ii. ¿Cómo estamos seguros de que no hay más que cinco poliedros regulares convexos?

Sobre i.: seguramente acordaremos rápidamente que las caras deben ser todas polígonos regulares convexos congruentes, es un buen ejercicio obtener ejemplos en los que se vea que esta condición no sería suficiente; una condición adicional que se puede imponer es que todos los ángulos sólidos sean congruentes. Observen esto en algunos de los poliedros platónicos. Comentaremos en clase otras condiciones adicionales equivalentes a la que acabamos de presentar, adelantan si piensan en esto.

Sobre ii. y iii.: es sabido que la suma de los ángulos planos que forman un ángulo sólido estrictamente convexo es menor que cuatro rectos, de aquí se deduce que en un poliedro convexo regular sólo pueden aparecer como caras triángulos (equiláteros), cuadrados y pentágonos (regulares). Los cinco sólidos platónicos son realizaciones de estas opciones, hay distintos procedimientos geométricos que permitem probar la existencia de todos ellos. Claramente el dodecaedro y el icosaedro son los que más dudas pueden generarnos, no entraremos en este asunto. Una cosa más, ¿cómo estamos seguros de que no hay diferentes realizaciones del icosaedro (20 caras que son triángulos equiáteros)?

Es posible dado un poliedro convexo $\mathcal{P}$ construir su poliedro dual $\mathcal{P}^*$, para el caso en el que el poliedro tenga todos sus vértices en una esfera y todas sus aristas congruentes, su dual puede obtenerse así : dado un vértice v de $\mathcal{P}$ se toman los puntos medios de las aristas incidentes en v estos puntos son los vértices de un polígono D inscriptible (en una circunferencia C), las tangentes a esta circunferencia C en los vértices de D definen (envuelven) un polígono convexo que es la cara de $\mathcal{P}^*$ que está asociada a v; haciendo esto con cada vértice de $\mathcal{P}$ conseguimos todas las caras de $\mathcal{P}^*$. Es recomendable visualizar este proceso en los sólidos platónicos. El tetraedro es autodual, el octaedro y el cubo están en dualidad, el icosaedro y el dodecaedro también están en dualidad.

El último tópico de esta primera clase: es la noción de grupo de simetrías. Como dijimos en la introducción el grupo de simetrías de un conjunto de puntos S de $\mathbb{R}^3$, está formado por los movimientos que dejan invariante a S, se entiende que la operación del grupo es la composición de movimientos. Es un ejercicio sencillo verificar que efectivamente el enunciado anterior define un grupo. Este grupo, que puede ser finito o no, es un subgrupo del grupo de todos los movimientos de $\mathbb{R}^3$. A veces nos restringiremos a considerar movimientos directos solamente.

Nuestro objetivo ahora es dar alguna descripción de los grupos de simetrías de los poliedros platónicos. Un primera observación que nos simplifica el trabajo es que aquellos poliedros que estén en dualidad tendrán el mismo grupo de simetrías. Ahora la estrategia es sencilla, primero nos concentramos en los movimientos directos que dejan invariante al tetraedro, los identificamos explícitamente y los contamos: son 12 (identidad incluída); si consideramos movimientos directos y no directos son 24.

Ejercicio. Si el subgrupo H formado por los movimientos directos de un grupo de movimientos G tiene n elementos, entonces G tiene $2n$ elementos.

El siguiente paso es considerar el octaedro, se ve que su grupo de simetrías directas tiene 24 elementos (lo mismo le ocurre al cubo).

Para el dodecaedro el conteo de sus simetrías directas da 60.

Con un poco más de trabajo puede decirse algo más sobre estos grupos de simetrías.

En el caso del octaedro podemos observar que si coloreamos con 4 colores sus caras, usando un color por cara y poniendo el mismo color en caras opuestas (paralelas) resulta que cada simetría (directa) del octaedro se corresponde biunívocamente con una permutación de los colores, así que abstractamente el grupo es el de las permutaciones de 4 elementos.

En el caso del dodecaedro, es un poquito más sutil, podemos ver que en el dodecaedro se pueden inscribir cinco cubos (cuyos vértices son vértices del dodecaedro), con un análisis cuidadoso se verifica que las simetrías directas del dodecaedro se corresponden biunívocamente con ciertas permutaciones (las pares) de los cubos. Para hacer esta verificación sugiero dibujar sobre las caras de un dodecaedro hecho en cartulina las aristas de los cubos y observar con atención.

El teorema de Klein que se mencionó en la introducción nos hace ver la importancia de los grupos de simetría de los poliedros platónicos. En ese teorema se mencionan otros grupos de simetría, ¿qué poliedros convexos sencillos darían lugar a esos grupos de isometrías?

Segunda clase: Poliedros semiregulares. Sólidos de Catalán.

Pappus le atribuye a Arquímedes el descubrimento de los poliedros semiregulares. El análisis que vamos a esbozar se basa en [1] que a su vez es una reformulación de lo escrito por Kepler (1571-1630) sobre esta cuestión.

Vamos a comenzar sin una definición precisa de poliedro semiregular, la cual la estableceremos recién al final de la clase. Comenzaremos por buscar los poliedros convexos cuyas caras sean todas polígonos regulares y tal que la configuración de caras que rodean un vértice sea la misma para todos los vértices. Lo primero será analizar las posibles configuraciones de polígonos alrededor de un vértice. Usaremos la siguiente notación: la terna (a, b, c) es la configuración en un vértice si en el mismo inciden un polígono regular de a, uno de b lados y un tercero de c lados, en ese orden; de igual manera una t-upla da la configuracón producida por t polígonos regulares.

Para familiarizarse con este concepto pueden elegir algunos de los sólidos arquimedianos y escribir la configuración de sus vértices, pueden hacer lo mismo para los prismas y los antiprismas.

Lema. Si todas las caras de un poliedro convexo son polígonos regulares, entonces a lo sumo tres tipos de caras pueden aparecer rodeando un vértice.

Demostración. Se deduce fácilmente del hecho de que los ángulos que forman un ángulo sólido convexo deben sumar menos que dos rectos.

El siguiente lema tiene en su hipótesis la igualdad de configuración en los vértices e infiere fuertes restricciones sobre ellas.

Lema. En un poliedro convexo en el cual los ángulos sólidos tienen la misma configuración, no son posibles las siguientes configuraciones: (a, b, c) con a impar y $b \neq c$ y $(a, b, c, 3)$ con $a \neq c$.

Demostración. Es un ejercicio sencillo.

Basados en los lemas anteriores y haciendo un análisis cuidadoso (no es difícil, es un poco largo) se puede probar el siguiente resultado.

Teorema. Si $\mathcal{P}$ es un poliedro convexo, tal que todas sus caras son polígonos regulares y tal que la configuración de todos sus vértices es la misma, entonces las posibles configuraciones de los vértices de $\mathcal{P}$ son $(4, 4, n)$, $(3, 3, 3, n)$ y otras 13 que se explicitan al hacer la demostración. (La configuración $(4, 4, n)$ corresponde a un prisma con base en un polígono de n lados y la configuración $(3, 3, 3, n)$ corresponde a un antiprisma.)

En la clase analizaremos en detalle alguna parte de la prueba, la totalidad de la prueba implica analizar una a una unas cuantas posibilidades.

El teorema anterior excluyendo a los prismas y a los antiprismas nos da trece posibles configuraciones, podría ocurrir que algunas configuraciones no se realicen por poliedro alguno y también podría ocurrir que alguna configuración se realizara con poliedros diferentes. Kepler en su trabajo exhibió representaciones gráficas de trece poliedros realizando las trece configuraciones.

Alrededor de 1960 Miller presentó un poliedro (al que a veces se le da su nombre) que parecía que podía calificar como décimocuarto sólido arquimediano, explicaremos en clase que poniendo en juego el grupo de simetría de los poliedros es bastante simple dar un definición de poliedro semiregular según la cual estos poliedros son exactamente los que enumeró Kepler.

Varios de los poliedros arquimedianos se obtienen por truncamiento o rectificación de los poliedros platónicos, es un buen ejercicio obtener algunos, ¿ cuáles se consiguen de esta forma?

Observar con atención los procedimientos que permiten construir todos los poliedros semiregulares nos permitirá probar alguna propiedad adicional notable de esta familia. Pueden pensar sobre esto, en clase daremos detalles.

Ejercicio. ¿Es posible distinguir de alguna manera conceptual a los prismas y antiprismas de los demás poliedros semiregulares?

Ya habíamos visto en la primera clase un procedimento para dualizar los poliedros platónicos. Ese mismo método se puede aplicar para dualizar a los poliedros semiregulares. Se obtiene así la familia que se conoce con el nombre de Sólidos de Catalán. Recomiendo observarlos con cierta atención, ¿qué propiedades remarcables tienen?

Tercera clase: Poliedros totalmente transitivos.

El propósito de esta clase es encontrar todos los poliedros compuestos que son totalmente transitivos respecto a su grupo de simetrías directas.

Para que esto nos lleve más allá de los poliedros platónicos debemos ampliar nuestra noción de poliedro, hasta ahora intuitiva si se trata de poliedros no convexos. Vamos a permitir que los poliedros no sean convexos y que sus caras sean polígonos no necesariamente convexos ni simples, podrían ser estrellas por ejemplo. También permitiremos que las caras se atraviesen, por ejemplo dos estrellas que se unen compartiendo un lado, incluso las caras podrían atravesarse y que su intersección no fuese un lado. La propiedad crucial que sí mantenemos es que cada arista pertenezca exactamente a dos caras. No queremos al inicio de esta clase formular una definición precisa de poliedro, podemos avanzar con eso pendiente, al final discutiremos alguna definición.

La envolvente convexa de un subconjunto del espacio es el menor convexo que lo contiene. El núcleo de un poliedro $\mathcal{P}$ está formado por las "partes interiores" de las caras de $\mathcal{P}$, el núcleo de un poliedro convexo es vacío -consideren esta noción sólo a nivel intuitivo-. Antes de continuar con la lectura sugiero observar con atención al pequeño dodecaedro estrellado y al gran dodecaedro, ¿cuáles serían sus caras si prentendemos que todas ellas sean congruentes?, ¿qué podemos decir de sus envolventes convexas?, ¿qué de sus núcleos?

Recordamos que un poliedro totalmente transitivo es uno que es transitivo en los vértices, en las aristas y en las caras. Ser transitivo en los vértices es que dados dos vértices existe una simetría directa del poliedro que lleva un vértice en el otro, análogamente para las aristas y las caras. Para chequear que se ha comprendido esta definición propongo que se responda la siguiente pregunta: ¿qué tipo de transitividad verifican los poliedros arquimedianos?, ¿el pequeño dodecaedro estrellado es totalmente transitivo?

También nos conviene considerar por un momento la estrella octángula, les recuerdo que está formada por dos tetraedros regulares congruentes cuyas aristas se cortan perpendicularmente en sus puntos medios, ¿que clase de transitividad tiene este poliedro compuesto?, ¿la estrella octángula es propiamente un poliedro?

Ahora que está más o menos claro el tipo de objetos que buscamos, vamos a iniciar la búsqueda exhaustiva de ellos.

Así que partimos de un poliedro o de un poliedro compuesto $\mathcal{P}$ que es totalmente transitivo. Lo primero que observamos es que sus caras (polígonos asumidos planos) deben ser todas congruentes, esto es por la transitividad en las caras, además estas caras deben ser regulares por la transitividad de las aristas. Seguidamente observamos que sus vértices deben estar en una esfera. Le llamamos $\hat{\mathcal{P}}$ a la envolvente convexa de $\mathcal{P}$. Es claro que el poliedro $\hat{\mathcal{P}}$ es transitivo en sus vértices, puesto que $\mathcal{P}$ lo es y ambos tienen los mismos vértices, por lo tanto todos los vértices de $\hat{\mathcal{P}}$ tienen la misma valencia (número de vértices adyacentes a un vértice dado), es un ejercicio sencillo (usando el teorema de

Euler) verificar que la valencia de los vértices de $\hat{\mathcal{P}}$ es menor o igual a 5. La estrategia de esta búsqueda consiste en determinar los posibles poliedros convexos $\hat{\mathcal{P}}$ donde aparecen las caras de $\mathcal{P}$ como polígonos planos cuyos vértices son vértices de $\hat{\mathcal{P}}$.

Bien, consideramos ahora la noción de estabilizador de un vértice, arista o cara de $\mathcal{P}$, es el sugbrupo de las simetrías del poliedro que deja invariante al vértice, arista o cara de $\mathcal{P}$ en cuestión. Para entender este concepto busquen determinar el estabilizador de un vértice, arista o cara del dodecaedro regular para el grupo de las simetrías directas y para el grupo total de las simetrías.

Ahora vamos a hacer un pequeño cálculo que nos permitirá limitar los posibles $\hat{\mathcal{P}}$. Llamemos N al número de simetrías de $\mathcal{P}$, E a su número de aristas, V a su número de vértices, η al cardinal del estabilizador de una arista de $\mathcal{P}$ (es el mismo para todas las aristas) y ψ al cardinal del estabilizador de un vértice de $\mathcal{P}$ (es el mismo para todos los vértices de $\mathcal{P}$). Las simetrías de $\mathcal{P}$ actúan sobre los vértices, aristas y caras de $\mathcal{P}$ de forma transitiva, en cualquiera de los tres casos tenemos una sola órbita y sabemos que en cualquier acción de un grupo finito el cardinal de una órbita es el cociente del orden del grupo por el orden del estabilizador de un punto cualquiera de la órbita. Esto aplicado a los vértices y a las aristas nos da $N = V\psi = E\eta$. Por otro lado si m es la valencia de los vértices de $\mathcal{P}$ resulta que $mV = 2E$. En definitiva $m\eta = 2\psi$. Entonces si m es impar m divide a ψ, en particular si m es 3 o 5 tenemos que el estabilizador del vértive v contiene una rotación de orden 3 o 5 (respectivamente). El grupo de las simetrías de $\mathcal{P}$ es un subgrupo del grupo de las simetrías de $\hat{\mathcal{P}}$, puesto que ambos poliedros tienen los mismos vértices, entonces el estabilizador de v en $\mathcal{P}$ es un subgrupo del estabilizador de v en $\hat{\mathcal{P}}$, a su vez como la valencia de v en $\hat{\mathcal{P}}$ es menor o igual que 5, si $m = 3$ (o $m = 5$) la valencia de v en $\hat{\mathcal{P}}$ es 3 (o 5 respectivamente). En estos casos todas las aristas de $\hat{\mathcal{P}}$ serán congruentes. Podemos concluir que $\hat{\mathcal{P}}$ es platónico (¿cuáles serían las opciones para $\hat{\mathcal{P}}$?).

Para el caso m=4 observamos que: el estabilizador de v tiene un número par de elementos, así que tiene un elemento de orden 2 (rotación de 180 grados, pues sólo consideramos movimientos directos).

Si $m > 5$ deducimos igualmente que el estabilizador de cualquier vértice contiene alguna rotación diferente de la identidad.

Si asumimos que todas las aristas de $\hat{\mathcal{P}}$ también son congruentes para $m = 4$ y $m > 5$ -lo cual parece cierto, se asume en [1], yo no lo sé probar-, tendríamos que $\hat{\mathcal{P}}$ es un poliedro semiregular que verifica la condición adicional de tener estabilizadores de vértices no triviales (rotaciones de 180 grados), así se nos agregan unos pocos poliedros convexos más en los cuales buscar las caras de nuestro $\mathcal{P}$, ¿cuáles son estos nuevos poliedros? Esta demostración se termina exhibiendo los poliedros candidatos y verificando que cumplen nuestro requerimento de ser totalmente transitivos, son 14 en total. En clase veremos representaciones gráficas de todos estos poliedros.

Para cerrar deseo hacer dos comentarios:

1. A lo largo del siglo pasado se fue dando un proceso de revisión de la noción de poliedro que condujo a que actualmente algunos autores destacados formulen que un poliedro es un grafo que satisface ciertas condiciones específicas. En ese sentido podemos comentar que Grünbaum en 1977 en [3] definió que un poliedro en $\mathbb{R}^3$ es una colección de polígonos (no necesariamente planos ni finitos) que verifican: i. cada arista es arista de exactamente dos caras; ii. dadas dos aristas e y e' existe una cadena de caras $f_1, ..., f_n$ tales que e es arista de f_1, e' es arista de f_n y dos caras sucesivas cualesquiera comparten una arista; iii. cada conjunto compacto corta sólo un número finito de caras. Un tiempo después en 1988 Farris en [2] propusó agregar una cuarta condición: que las caras que rodean cada vértice estén en ciclo. En 2007 el mismo Grünbaum en [4] formuló una nueva definición abstracta en la que los polígonos son grafos cíclicos finitos, a su vez agregó algunas condiciones más (además de la de Farris) que permiten la dualización de estos poliedros abstractos.

2. Hay una noción de regularidad más estándar que la de regularidad total: un poliedro es regular si sus simetrías (directas e indirectas) actúan de forma transitiva en sus banderas. Una bandera es una terna (v, a, c) donde v es vértice de la arista a y a es arista de la cara c. Observen que ninguno de los poliedros que obtuvimos más arriba es regular si sólo usamos simetrías directas. En el trabajo [3] se da una descripción completa de todos los poliedros regulares, como ya comentamos, permitiendo eventualmente que las caras sean polígonos infinitos no nesariamente planos.

Referencias principales

[1] P.R. Cromwell, Polyhedra, Cambridge University Press, 1999.

[2] S. L. Farris, Completely classifying all vertex-transitive and edge-transitive polyhedra, Geom. Dedicata 26 (1988) 111-124.

[3] B. Grünbaum, Regular polyhedra–old and new, Aequationes Math. 16 (1977) 1-20.

[4] B. Grünbaum, Graphs of polyhedra; polyhedra as graphs, Discrete Mathematics 307 (2007) 445-463.